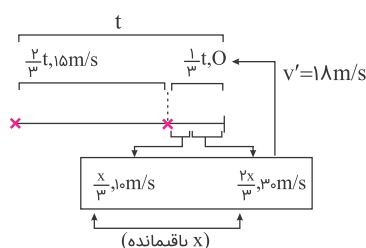


ابتدا باید بدانیم که در این مثال همه قسمت‌های حرکت دارای سرعت ثابت هستند، پس:

$$\Delta x = v \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x}{v}$$

در ابتدا می‌گوییم $\frac{2}{3}$ کل زمان را با سرعت ثابت 15 (m/s) طی می‌کند، پس $\frac{1}{3}$ کل زمان باقی می‌ماند که راجع به سرعت آن چیزی نمی‌دانیم ولی تکه‌ای که راجع به سرعت آن اطلاعات نداده است مجدداً به دو قسمت تقسیم کرده است پس می‌توان سرعت متوسط در آن تکه را یافته و به عنوان تندی ثابت و لحظه‌ای در بازه زمانی که اطلاعات سرعت را نداریم از آن استفاده کنیم:



$$\text{قسمت کوچک‌تر (تقسیم مسیر)} \begin{cases} \Delta x_1 = \frac{x}{3}, v_1 = 10 \text{ (m/s)} \\ \Delta x_2 = \frac{2x}{3}, v_2 = 30 \text{ (m/s)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_{av} = \frac{\frac{x}{3} + \frac{2x}{3}}{\frac{x}{10} + \frac{2x}{30}} = \frac{\frac{x}{1}}{\frac{x}{30} + \frac{x}{15}} = \frac{\frac{x}{1}}{\frac{2x}{30}} = \frac{30}{2} = 15 \text{ (m/s)}$$

$$\text{قسمت بزرگ‌تر (تقسیم زمان)} \begin{cases} \Delta t_1 = \frac{2t}{3}, v_1 = 15 \text{ m/s} \\ \Delta t_2 = \frac{t}{3}, v_2 = 18 \text{ m/s} \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_{av \text{ کل}} = \frac{\frac{2t}{3} \times 15 + \frac{t}{3} \times 18}{\frac{2t}{3} + \frac{t}{3}} = \frac{10t + 6t}{t} = 16 \text{ (m/s)}$$

ابتدا با استفاده از شیب خطچین رسم شده بر نمودار، سرعت اولیه متحرک را به دست می‌آوریم.

$$v_0 = (t = 0) \text{ شیب خط مماس در } = \frac{0 - (-12)}{2 - 0} = 6 \text{ m/s}$$

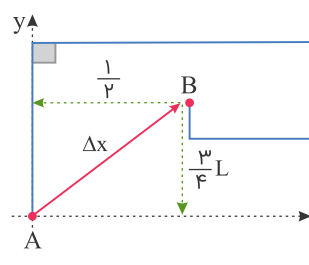
با توجه به نمودار سرعت متحرک در $t = 6 \text{ s}$ و در $t = 12 \text{ s}$ برابر صفر است. همچنین شتاب متوسط در 6 ثانیه نخست منفی و در 3 ثانیه پنجم یعنی $(12 \text{ s}, 15 \text{ s})$ مثبت است. طبق گفته سؤال اندازه شتاب در این دو بازه برابر است، پس:

$$a_{av(0,6s)} = -a_{av(12s,15s)} \Rightarrow \frac{v_{6s} - v_0}{6 - 0} = -\frac{v_{15s} - v_{12s}}{15 - 12}$$

$$\Rightarrow \frac{0 - 6}{6 - 0} = -\frac{v_{15s} - 0}{3} \Rightarrow v_{15s} = 3 \text{ m/s}$$

حالا شتاب متوسط در 15 ثانیه نخست را به دست می‌آوریم:

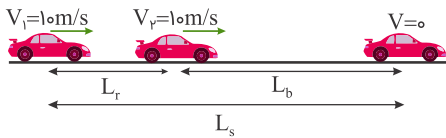
$$a_{av(0,15s)} = \frac{v_{15s} - v_0}{15 - 0} = \frac{3 - 6}{15} = \frac{-3}{15} = -0.2 \text{ m/s}^2$$



$$\left\{ \begin{array}{l} A \\ B \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta x = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{3L}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}L}{4}$$

$$\Rightarrow v_{av} = \frac{\frac{\sqrt{13}L}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{13}L}{6} \text{ m/s}$$

گام اول: مسافتی که خودرو در زمان واکنش طی می‌کند، برابر است با:



گام دوم: زمان کل حرکت برابر مجموع زمان واکنش و زمان ترمز است؛ بنابراین زمان ترمز راننده $1/4$ s طول می‌کشد.

$$t_s = t_r + t_b \Rightarrow 2 = 0.6 + t_b \Rightarrow t_b = 1/4 \text{ s}$$

مسافت ترمز برابر است با:

$$\Delta x = \left(\frac{v + v_0}{2} \right) t \Rightarrow L_b = \left(\frac{0 + 10}{2} \right) \times 1/4 = 7 \text{ m}$$

گام سوم:

$$\text{مسافت کل از رؤیت تا توقف} = \text{مسافت واکنش} + \text{مسافت ترمز} \Rightarrow L_s = L_r + L_b = 6 + 7 = 13 \text{ m}$$

ابتدا لحظه‌ای که سرعت متحرک صفر و جهت حرکت عوض می‌شود را به دست می‌آوریم. برای این کار ابتدا شتاب و سرعت اولیه را از معادله مکان - زمان به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x = -t^2 + 8t + 20 \\ a = -2 \text{ m/s}^2 \\ v_0 = 8 \text{ m/s} \end{cases} \Rightarrow v = at + v_0 \Rightarrow 0 = -2t + 8 \Rightarrow t = 4 \text{ s}$$

پس تا قبل از لحظه $t = 4 \text{ s}$ حرکت کندشونده و بعد از این لحظه حرکت تندشونده است.

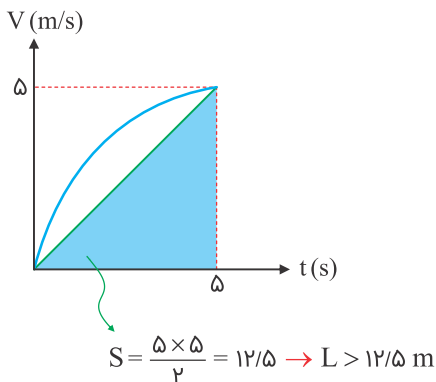
حالا لحظه تغییر جهت بردار مکان را محاسبه می‌کنیم:

$$x = -t^2 + 8t + 20 = 0 \Rightarrow t^2 - 8t - 20 = 0$$

$$\Rightarrow (t - 10)(t + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 10 \text{ s} \checkmark \\ t = -2 \text{ s} \times \end{cases}$$

بردار مکان متحرک در لحظه $t = 10 \text{ s}$ تغییر جهت داده است پس تا این لحظه حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده بوده است.

اندازه مساحت زیر نمودار $v - t$ برابر با مسافت پیموده شده است. مساحت زیر نمودار به طور دقیق مشخص نیست ولی مسلماً بیشتر از مساحت مثلث رنگی است. تنها گزینه‌ای که از مساحت مثلث رنگی بیشتر است گزینه ۴ است.



فاصله دو شهر از یکدیگر برابر با ۳۸۰۰ متر است؛ یعنی خودروی A از مکان $x = -۳۰۰۰ \text{ m}$ شروع به حرکت کرده است. با استفاده از معادله حرکت با سرعت ثابت می‌توان نوشت:

$$\left. \begin{array}{l} x = vt + x_0 \\ v = 144 \text{ km/h} = 40 \text{ m/s} \\ x_0 = -3000 \text{ m} \end{array} \right\} \Rightarrow x = 40t - 3000$$

مکان اولیه حرکت خودروی B، $x = +۸۰۰ \text{ m}$ است. در این صورت داریم:

$$\left. \begin{array}{l} x = 40t - 3000 \\ x = 800 \end{array} \right\} \Rightarrow 40t = 3800 \Rightarrow t = 95 \text{ s}$$

برای مشخص کردن مکان خودروی B، ابتدا لحظه عبور خودروها از مبدأ محور را مشخص می‌کنیم:

$$x = 40t - 3000 \Rightarrow 0 = 40t - 3000 \Rightarrow t = 75 \text{ s}$$

پس می‌توان معادله حرکت خودروی B را مشخص کرد:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v = -\frac{800}{75} = -\frac{32}{3} \text{ m/s}$$

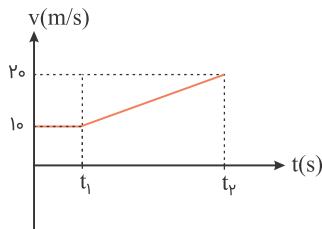
$$x = -\frac{32}{3}t + 800 \xrightarrow{t=95 \text{ s}} x = 480 \text{ m} \Rightarrow \vec{d} = 480 \vec{i}$$

$$x = 0 \Rightarrow v_1 = 10 \text{ m/s} \Rightarrow x = 25 \text{ m} \Rightarrow v_1 = 10 \text{ m/s}$$

$$\delta \text{ بازه: } 25 \leq x \leq 100 \Rightarrow v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$$

$$\Rightarrow v^2 - 100 = 2 \times 2(75) \Rightarrow v_2 = 20 \text{ m/s}$$

حال نمودار سرعت- زمان را رسم می‌کنیم.



$$t_1 = \frac{\Delta x}{v_1} \Rightarrow t_1 = \frac{25}{10} = 2.5 \text{ (s)}$$

$$t_1 < t < t_2 \Rightarrow a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow 2 = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow 2 = \frac{20 - 10}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = 5 \text{ s}$$

$$t_2 = 5 + 2.5 = 7.5 \text{ s}$$

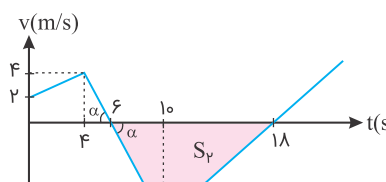
$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{20 - 10}{7.5} = \frac{10}{7.5} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3} \text{ m/s}^2$$

مخالف بودن علامت بردارهای مکان و سرعت یعنی متحرک یا با سرعت منفی در x های مثبت است یا با سرعت مثبت در x های منفی است که در هر دو صورت در حال نزدیک شدن به $(x = 0)$ است و از طول بردار مکان کاسته می‌شود.

گام اول: متحرک از $x = -20\text{ m}$ قرار است به $x = +20\text{ m}$ برسد، یعنی جابه‌جایی آن $\Delta x = +40\text{ m}$ است؛ بنابراین باید لحظه‌ای را پیدا کنیم که مجموع مساحت‌های زیر نمودار تا آن لحظه برابر با $+40\text{ m}$ شود.
گام دوم: ابتدا مساحت سطح زیر نمودار را تا لحظه $t = 6\text{ s}$ محاسبه می‌کنیم.

$$s_1 = \left(\frac{2+4}{2} \times 4\right) + \frac{2 \times 4}{2} = 16\text{ m} \Rightarrow \Delta x_1 = 16\text{ m}$$

بنابراین هنوز به $\Delta x = 40\text{ m}$ نرسیده‌ایم. مساحت زیر نمودار در بازه $(6\text{ s}, 18\text{ s})$ برابر است با:

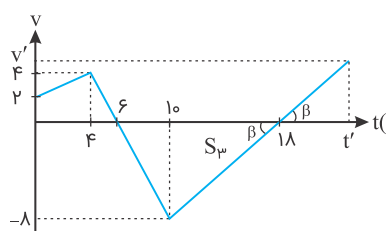


$$\frac{4}{6-4} = \frac{|v|}{10-6} \Rightarrow |v| = 4 \Rightarrow v = -4\text{ m/s}$$

$$\Rightarrow s_2 = \frac{12 \times |v|}{2} = 48 \Rightarrow \Delta x_{(6\text{ s}, 18\text{ s})} = -48\text{ m}$$

در مجموع جابه‌جایی از $t = 0$ تا $t = 18\text{ s}$ برابر با $\Delta x_1 + \Delta x_2 = 16 - 48 = -32\text{ m}$ است.

گام سوم: پس لحظه t بعد از لحظه $t = 18\text{ s}$ است. اگر لحظه‌ای که متحرک به $x = 20\text{ m}$ می‌رسد را t' در نظر بگیریم، داریم:



$$\frac{4}{18-10} = \frac{v'}{t'-18} \Rightarrow v' = t' - 18$$

$$s_3 = \frac{v' \times t'}{2} = \frac{(t'-18)(t'-18)}{2} = \frac{(t'-18)^2}{2}$$

گام چهارم: مجموع مساحت‌های s_1 ، s_2 و s_3 به همراه علامت آن‌ها برابر با جابه‌جایی کل است که آن را برابر با $+20\text{ m}$ قرار می‌دهیم.

$$\Delta X_t = s_1 - s_2 + s_3 = +20 \Rightarrow -32 + \frac{(t'-18)^2}{2} = 40$$

$$\Rightarrow (t'-18)^2 = 144 \Rightarrow t'-18 = 12 \Rightarrow t' = 30\text{ s}$$

گام پنجم: حالا تندی متوسط متحرک در این بازه را به دست می‌آوریم:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{16 + 48 + 72}{30} = \frac{136}{30} = \frac{68}{15}\text{ m/s}$$

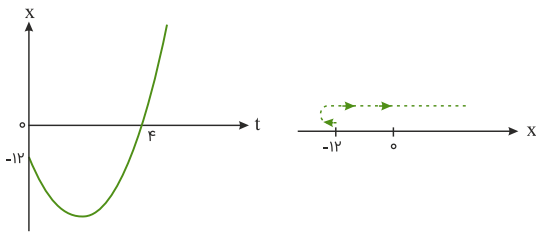
آ) برای آنکه جهت بردار مکان تغییر کند، جسم باید از مبدأ محور عبور کند. در این صورت داریم:

$$x = 0 \Rightarrow 2t^2 - 5t - 12 = 0 \Rightarrow (2t + 3)(t - 4) = 0$$

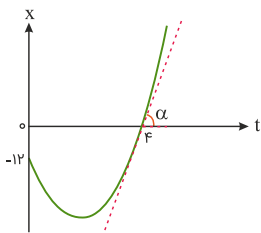
$$\Rightarrow \begin{cases} t = 4s \\ t = -1/5s < 0 \end{cases} \text{ غ. ق. ق. غ.}$$

یعنی در لحظه $t = 4s$ جهت بردار مکان تغییر می‌کند. (نادرست)

ب) نمودار مکان- زمان حرکت جسم مطابق شکل است. باتوجه به نمودار مشخص می‌شود که جسم در ۴ ثانیه اول حرکت ابتدا در جهت منفی محور و سپس در جهت مثبت محور حرکت کرده است. (نادرست)

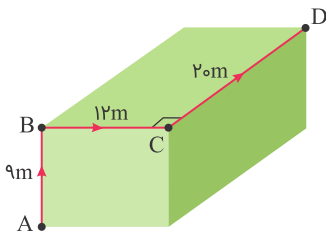


پ) باتوجه به نمودار مشخص می‌شود که در لحظه $t = 4s$ شیب خط مماس بر نمودار دارای مقداری مخالف صفر است. (نادرست)



ت) از لحظه شروع حرکت تا لحظه $t = 4s$ جسم در مکان‌های منفی قرار دارد؛ بنابراین بردار مکان آن نیز منفی است. (نادرست)

برای محاسبه مسافت، تمام فاصله‌ها را باهم جمع می‌کنیم.



$$L = 9 + 12 + 20 = 41 \text{ m}$$

برای محاسبه جابه‌جایی باید فاصله مستقیم مبدأ تا مقصد (AD) را حساب کنیم. AC و CD روی صفحه‌های عمود بر هم قرار دارند؛ پس:

$$\begin{aligned} AD^2 &= AC^2 + CD^2 = (AB^2 + BC^2) + CD^2 = (9^2 + 12^2) + 20^2 \\ &= 15^2 + 20^2 = 25^2 \Rightarrow AD = 25 \text{ m} \Rightarrow \frac{L}{AD} = \frac{41}{25} \end{aligned}$$

از روی معادله $x - t$ ، شتاب و سرعت اولیه را به دست می‌آوریم:

$$a = 2 \text{ m/s}^2, v_0 = -8 \text{ m/s}$$

لحظه تغییر جهت را به دست می‌آوریم:

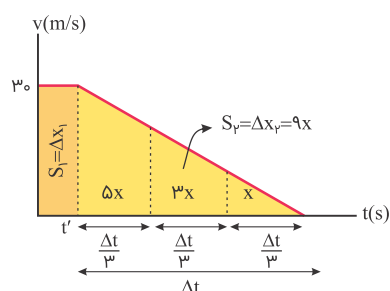
$$v = at + v_0 \Rightarrow 0 = 2t - 8 \Rightarrow t_{\text{تغییر جهت}} = 4 \text{ s}$$

نکته: اگر در بازه زمانی (t_1, t_2) ، داشته باشیم: $\frac{t_1 + t_2}{2} = t_{\text{تغییر جهت}}$ ، آنگاه جابه‌جایی و سرعت متوسط متحرک صفر است.

این شرایط در بازه زمانی گزینه "۱" برقرار است:

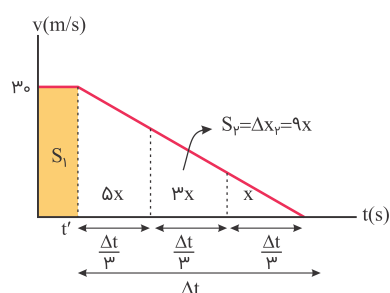
$$\frac{1 + 7}{2} = 4$$

ابتدا نمودار $v - t$ حرکت را رسم می‌کنیم. اگر جابه‌جایی متحرک در $\frac{\Delta t}{3}$ آخر حرکت شتابدار خود $x = 14 \text{ m}$ باشد به ترتیب در $\frac{\Delta t}{3}$ های قبلی $3x$ و $5x$ است.



بنابراین کل جابه‌جایی اتومبیل درحالی‌که حرکت شتابدار دارد $\Delta X = 5x + 3x + x = 9x$ یا $\Delta X = 9 \times 14 = 126 \text{ m}$ است.

حالا با محاسبه ناحیه S_1 می‌توانیم زمان واکنش را به دست آوریم:



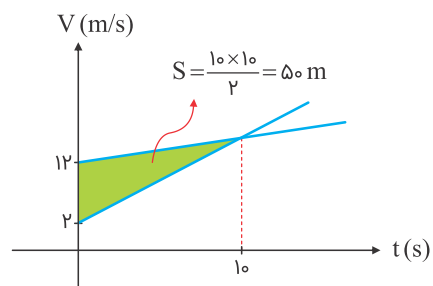
$$S_r = \Delta X - \Delta X_r = \Delta X_1 \Rightarrow \Delta X_1 = 135 - 126 = 9 \text{ m}$$

$$t' = \frac{\Delta X_1}{v_0} \Rightarrow t' = \frac{9}{30} = 0.3 \text{ s}$$

یک راه خوب برای بررسی حرکت متحرک‌ها رسم نمودار $v - t$ است.

$$\left. \begin{array}{l} v_1 = 2t + 2 \\ v_2 = t + 12 \end{array} \right\} v_1 = v_2 \Rightarrow 2t + 2 = t + 12 \Rightarrow t = 10$$

باتوجه به شکل زیر، حداکثر فاصله دو متحرک مساحت مثلث محصور بین دو نمودار است.



ابتدا محیط دایره را به دست می‌آوریم تا تعداد دوری که اتومبیل طی کرده است به دست بیاید:

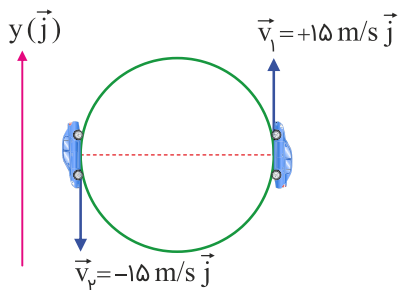
$$\text{محیط دایره} = 2\pi R = 2 \times 3 \times 40 = 240 \text{ m}$$

$$\text{تعداد دور} = \frac{\ell}{\text{محیط دایره}} = \frac{120}{240} = \frac{1}{2} \text{ دور}$$

حالا مدت‌زمان طی کردن ۱۲۰ m را به دست می‌آوریم:

$$S = \frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow 15 = \frac{120}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = 8 \text{ s}$$

با توجه به این‌که بردار سرعت در هر لحظه بر مسیر مماس است، بردارهای سرعت اولیه و نهایی متحرک در مدت ۸ s را روی دایره رسم می‌کنیم و تغییرات سرعت را محاسبه می‌کنیم:



$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = -15 - (+15) = -30 \text{ m/s j}$$

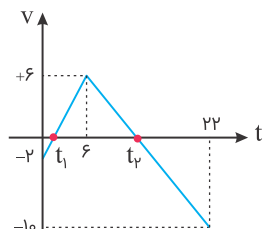
در نهایت از رابطه $\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ ، بزرگی شتاب متوسط را به دست می‌آوریم:

$$|\vec{a}_{av}| = \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} = \frac{30}{8} = 3.75 \text{ m/s}^2$$

زمان‌های مجهول t_1 و t_2 را به کمک تشابه مثلثات به دست می‌آوریم:

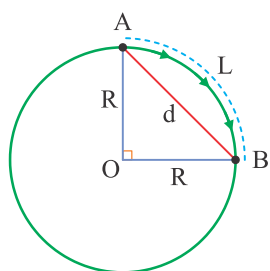
$$\frac{6 - t_1}{t_1} = \frac{|6|}{|-2|} \Rightarrow t_1 = 1/5$$

$$\frac{22 - t_2}{t_2 - 6} = \frac{|-10|}{|6|} \Rightarrow t_2 = 12$$



در بازه زمانی t_1 تا t_2 ، سرعت متحرک مثبت است. پس $12 - 1/5 = 10/5$ ثانیه در جهت مثبت محور x حرکت کرده‌ایم.

متحرک ۲۵ درصد از محیط دایره را طی کرده است و این یعنی $\frac{1}{4}$ از محیط دایره $(\frac{25}{100})$ طی شده است؛ در نتیجه متحرک مانند شکل زیر 90° روی دایره چرخیده و از نقطه A به نقطه B می‌رسد. شعاع دایره را R فرض کرده و مسافت و اندازه جابه‌جایی را محاسبه می‌کنیم:



$$\ell = \text{مسافت طی شده} = \frac{1}{4}(\text{محیط دایره}) = \frac{1}{4} \times 2\pi R \xrightarrow{\pi=3} \ell = \frac{3R}{2}$$

$$d = \text{اندازه جابه‌جایی} = \sqrt{R^2 + R^2} \Rightarrow d = \sqrt{2}R$$

حالا به کمک روابط تندی متوسط و سرعت متوسط می‌توان نوشت:

$$\frac{s_{av}}{v_{av}} = \frac{\frac{\ell}{\Delta t}}{\frac{d}{\Delta t}} = \frac{\ell}{d} = \frac{\frac{3R}{2}}{\sqrt{2}R} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

چون شیب خط مماس بر منحنی در $t = 0$ برابر با صفر است، پس سرعت اولیه صفر است.

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow \Delta = \frac{1}{2} \times a \times 16 \Rightarrow a = 1 \text{ m/s}^2$$

فاصله متحرک‌ها را برحسب زمان حساب می‌کنیم:

$$d = |x_1 - x_2| = |(12t - 170) - (4t + 10)| = |4t - 180|$$

لحظه‌هایی که فاصله متحرک‌ها ۳۰ و ۷۰ متر می‌شود را به دست می‌آوریم:

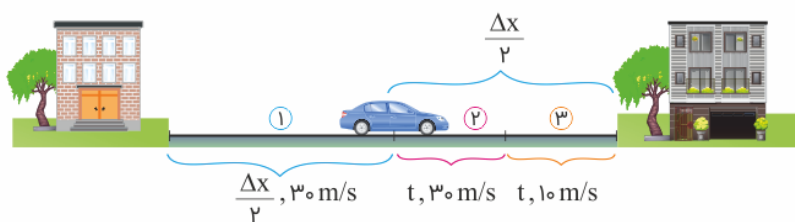
$$|4t - 180| = 30 \Rightarrow 4t - 180 = \pm 30 \Rightarrow \begin{cases} 4t = 150 \Rightarrow t = 37/5 \text{ s} \\ 4t = 210 \Rightarrow t = 52/5 \text{ s} \end{cases}$$

$$|4t - 180| = 70 \Rightarrow 4t - 180 = \pm 70 \Rightarrow \begin{cases} 4t = 110 \Rightarrow t = 27/5 \text{ s} \\ 4t = 250 \Rightarrow t = 62/5 \text{ s} \end{cases}$$

در لحظه $t = 37/5 \text{ s}$ برای اولین بار فاصله متحرک‌ها ۳۰ متر می‌شود و در لحظه $t = 62/5 \text{ s}$ برای دومین بار فاصله آن‌ها ۷۰ متر می‌شود.

$$\Rightarrow \Delta t = 62/5 \text{ s} - 37/5 \text{ s} = 25 \text{ s}$$

ابتدا تندی متوسط در قسمت‌های دوم و سوم حرکت را به دست می‌آوریم:

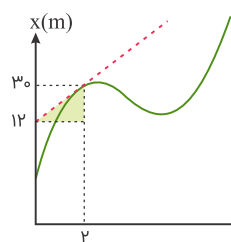


$$v_{av} = \frac{\Delta x_2 + \Delta x_3}{\Delta t_2 + \Delta t_3} = \frac{30t + 10t}{t + t} = 20 \text{ m/s}$$

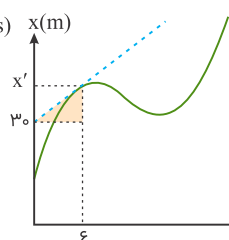
حالا تندی متوسط در کل مسیر را به دست بیاوریم:

$$v_{av(کل)} = \frac{\frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta x}{2}}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3} = \frac{\Delta x}{\frac{\Delta x}{30} + \frac{\Delta x}{20}} = \frac{\Delta x}{\frac{1}{60} + \frac{1}{40}} = \frac{\Delta x}{\frac{5}{120}} = \frac{120\Delta x}{5\Delta x} = 24 \text{ m/s}$$

$$v_{av(کل)} = \frac{120\Delta x}{5\Delta x} = 24 \text{ m/s}$$



$$v_2 = \frac{30 - 12}{2 - 0} = 9 \text{ m/s}$$



$$\frac{1}{2} v_2 = v_6 = \frac{x' - 30}{6 - 0} = 4/5 \Rightarrow x' = 57 \text{ m}$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{57 - 30}{6 - 2} = \frac{27}{4} \text{ m/s}$$

متحرک B که با تندی بیشتر حرکت می‌کند زودتر به مقصد خودش می‌رسد. اگر مدت حرکت این متحرک تا رسیدن به مقصد را Δt در نظر بگیریم، زمان حرکت متحرک A تا رسیدن به مقصد $\Delta t + t$ است. اگر فاصله دو شهر را ℓ در نظر بگیریم، داریم:

$$\begin{cases} \ell = v_A t_A = v(\Delta t + t) \\ \ell = v_B t_B = 1/5 v \times \Delta t \end{cases} \Rightarrow v(\Delta t + t) = 1/5 v \Delta t \Rightarrow \Delta t = 2t$$

ℓ برابر است با:

$$\ell = v(\Delta t + t) = v(2t + t) = 3vt$$

هنگامی که دو متحرک به هم می‌رسند، مجموع مسافتی که دو متحرک طی کرده‌اند برابر ℓ است. اگر مدت زمان رسیدن دو متحرک را به هم t' در نظر بگیریم، داریم:

$$\ell_A + \ell_B = \ell \Rightarrow v_A t' + v_B t' = \ell \Rightarrow vt' + 1/5 vt' = \ell$$

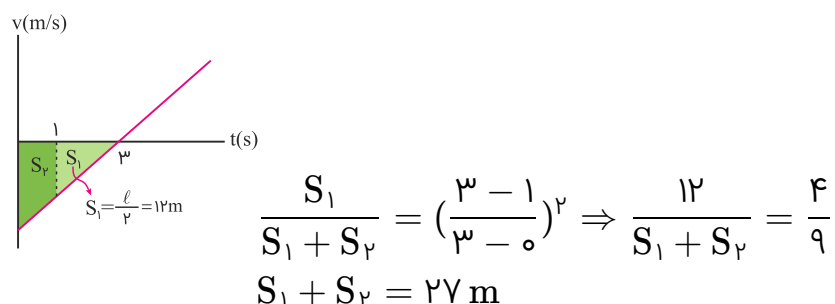
با جایگذاری $\ell = 3vt$ در رابطه بالا، داریم:

$$vt' + 1/5 vt' = 3vt \Rightarrow 2/5 t' = 3t \Rightarrow t' = \frac{6}{5}t$$

کمترین تندی متوسط متحرک در بازه ۴ ثانیه‌ای در بازه $(3 + 2)s$ تا $(3 - 2)s$ است. بنابراین کمترین مسافت طی شده در بازه $(1s, 5s)$ رخ می‌دهد که برابر است با:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow 6 = \frac{\ell}{4} \Rightarrow \ell = 24 \text{ m}$$

نصف این مسافت طبق تقارن سهمی در بازه $(1s, 3s)$ رخ داده است. باتوجه به نمودار سرعت- زمان متحرک و استفاده از نسبت تشابه، مسافت طی شده در خلاف جهت محور X برابر است با:



بنابراین مسافت طی شده در ۳ ثانیه نخست که متحرک خلاف جهت محور حرکت کرده است برابر با ۲۷ m است.

شتاب متحرک را a و سرعت اولیه آن را v_0 فرض می‌کنیم. متحرک در لحظه $t = 1\text{ s}$ در مکان $x = -5\text{ m}$ قرار دارد. همچنین در این لحظه جهت حرکت تغییر کرده و سرعت متحرک صفر شده است.

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t \\ v = at + v_0 \end{cases} \xrightarrow{t=1\text{ s}} \begin{cases} -5 = \frac{1}{2}a + v_0 \Rightarrow a + 2v_0 = -10 \\ 0 = a + v_0 \Rightarrow a = -v_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (-v_0) + 2v_0 = -10 \Rightarrow v_0 = -10\text{ m/s} \Rightarrow a = 10\text{ m/s}^2$$

مکان متحرک را در لحظه $t = 4\text{ s}$ را حساب می‌کنیم:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t = 5t^2 - 10t \xrightarrow{t=4\text{ s}} x = +40\text{ m}$$

متحرک از مکان صفر به مکان -5 m و سپس از مکان -5 m به مکان $+40\text{ m}$ رفته است.

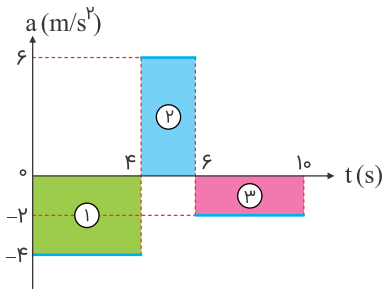
$$\Rightarrow \text{مسافت پیموده شده } L = |(-5\text{ m}) - 0| + |(40\text{ m}) - (-5\text{ m})| = 50\text{ m}$$

$$\Rightarrow \text{تندی متوسط } S_{av} = \frac{L}{\Delta t} = \frac{50\text{ m}}{4\text{ s}} = 12.5\text{ m/s}$$

در هر بازه زمانی t :

$$\Delta x = \left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right)t$$

Δv : مساحت سطح زیر نمودار $(a - t)$



$$\begin{cases} v_2 = 2 \times 6 = 12\text{ m/s} \\ \Delta x_2 = \left(\frac{(-12) + 0}{2}\right) \times 2 = -12\text{ m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = (-4) \times 4 = -16\text{ m/s} \\ \Delta x_1 = \left(\frac{4 + (-12)}{2}\right) \times 4 = -16\text{ m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_3 = 4 \times (-2) = -8\text{ m/s} \\ \Delta x_3 = \left(\frac{0 + (-8)}{2}\right) \times 4 = -16\text{ m} \end{cases}$$

$$\bar{v} = \frac{\Delta x_{\text{کل}}}{\Delta t} = \frac{(-16) + (-12) + (-16)}{10} = \frac{-44}{10} = -4.4\text{ m/s}$$

گام اول: لحظه‌ی به هم رسیدن هر دو متحرک را محاسبه می‌کنیم:

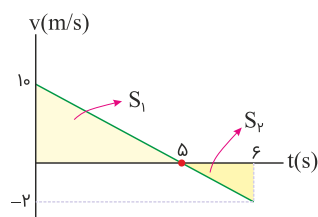
$$x_A = x_B \Rightarrow 3t^2 + 4t = -t^2 + 10t + 72 \\ \Rightarrow 3t^2 - 6t - 72 = 0 \Rightarrow t^2 - 2t - 24 = 0$$

$$\Rightarrow (t - 6)(t + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 6s & \checkmark \\ t = -4s & \times \end{cases}$$

برای به دست آوردن مسافت طی‌شده توسط متحرک B نمودار $v - t$ آن را رسم می‌کنیم:

$$\begin{cases} x_B = -t^2 + 10t + 72 \\ x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \text{ m/s}^2 \\ v_0 = 10 \text{ m/s} \end{cases} \quad (*)$$

$$v = at + v_0 \xrightarrow{(*)} v_B = -2t + 10 \Rightarrow \begin{cases} v = 0 \Rightarrow t = 5s \\ t = 6s \Rightarrow v = -2 \text{ m/s} \end{cases}$$



$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \frac{5 \times 10}{2} = 25 \Rightarrow \Delta x_1 = 25 \text{ m} \\ S_2 &= \frac{2 \times 1}{2} = 1 \Rightarrow \Delta x_2 = -1 \text{ m} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \ell = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| \Rightarrow \ell = 25 + 1 = 26 \text{ m}$$

گام اول: ابتدا شکلی از مسئله رسم می‌کنیم:



مسافتی که هریک از دو اتومبیل طی می‌کنند تا متوقف شوند را به دست می‌آوریم. با استفاده از معادله مستقل از زمان، داریم:

$$\begin{aligned} A: & \begin{cases} v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 0 - (20)^2 = 2(-2)\Delta x_A \Rightarrow \Delta x_A = 100 \text{ m} \\ v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 0 - (-10)^2 = 2(+2)\Delta x_B \Rightarrow |\Delta x_B| = 25 \text{ m} \end{cases} \\ B: & \end{aligned}$$

بنابراین مجموع مسافت‌هایی که دو اتومبیل طی می‌کنند تا متوقف شوند بیشتر از ۱۱۶ متر است و دو اتومبیل به یکدیگر برخورد می‌کنند.

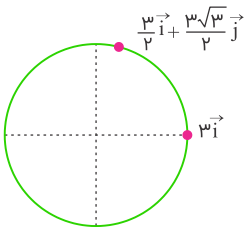
اتومبیل B در مدت $t = \frac{|v_0|}{|a|} = \left| \frac{10}{2} \right| = 5 \text{ s}$ متوقف می‌شود. در این مدت مجموع جابجایی دو اتومبیل برابر است با:

$$\begin{cases} \Delta x_A = -t^2 + 20t \xrightarrow{t=5 \text{ s}} \Delta x_A = -5^2 + 20(5) = 75 \text{ m} \\ \Delta x_B = +t^2 - 10t \xrightarrow{t=5 \text{ s}} |\Delta x_B| = \left| +(5)^2 - 10(5) \right| = 25 \text{ m} \end{cases}$$

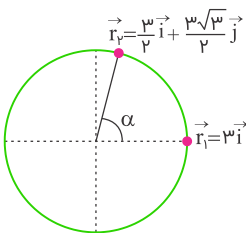
پس از توقف اتومبیل B فاصله بین دو اتومبیل به $116 - (75 + 25) = 16 \text{ m}$ می‌رسد و اتومبیل A این فاصله ۱۶ متری را به‌تنهایی طی می‌کند تا به اتومبیل B برخورد کند. بنابراین کل مسافتی که اتومبیل A طی می‌کند برابر $75 + 16 = 91 \text{ m}$ است و سرعت متحرک A پس از طی این مسافت یعنی در لحظه برخورد به اتومبیل B برابر است با:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x_A \Rightarrow v^2 - 20^2 = 2(-2)(91) \Rightarrow v^2 = 36 \text{ m/s} \Rightarrow v = 6 \text{ m/s}$$

این متحرک در حال حرکت روی محیط دایره است:



باتوجه به اینکه فاصله هر نقطه روی محیط دایره تا مرکز آن برابر شعاع آن دایره است، پس شعاع مسیر حرکت برابر ۳ m خواهد بود.
در مرحله بعد:



$$\text{پس } \alpha = 60^\circ \text{ بوده است} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \text{tg } \alpha : \text{در مورد } r_2$$

در این صورت متحرک در این جابه جایی به اندازه $\frac{1}{6}$ محیط دایره مسافت طی کرده است.

$$S_{av} = \frac{\frac{1}{6}(2\pi r)}{10} = \frac{\pi}{10} \text{ m/s}$$

گام اول: سرعت متحرک در لحظه $t = ۲s$ برابر صفر است بنابراین جابه‌جایی‌های متحرک به ترتیب در ثانیه‌های سوم، چهارم و پنجم برابر $-x$ ، $-۳x$ و $-۵x$ است. بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم که جابه‌جایی‌های متحرک در ثانیه‌های دوم و اول به ترتیب x و $۳x$ بوده است.

گام دوم: می‌توانیم به کمک مسافت کل x را محاسبه کنیم:

$$\ell = ۳x + x + |-x| + |-۳x| + |-۵x| \Rightarrow ۳۹ = ۱۳x \Rightarrow x = ۳ \text{ m}$$

گام سوم: جابه‌جایی از لحظه $t = ۲s$ تا $t = ۵s$ برابر است با:

$$\Delta X = -x - ۳x - ۵x = -۹x \Rightarrow \Delta X = -۲۷ \text{ m}$$

گام چهارم: حالا از رابطه مستقل از شتاب تندی متحرک را در لحظه عبور از مبدأ به دست می‌آوریم:

$$\frac{v_1 + v_2}{۲} = \frac{\Delta X}{\Delta t} \Rightarrow \frac{0 + v_2}{۲} = \frac{-۲۷}{۵ - ۲}$$

$$\Rightarrow v_2 = -۱۸ \text{ m/s} \Rightarrow |v_2| = ۱۸ \text{ m/s}$$